تعاريف ومفاهيم أساسية على الدائرة

الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة فى المستوى

- تسمى النقطة الثابتة ((مركز الدائرة))   - يسمى البعد الثابت ((طول نصف قطر الدائرة))

- نرمز للدائرة بمركزها فعندما نقول الدائرة م أى الدائرة التى مركزها م

الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط

① مجموعة نقط خارج الدائرة   ② مجموعة نقط على الدائرة   ③ مجموعة نقط داخل الدائرة

---

(١)نصف قطر الدائرة : هو القطعة المستقيمة التي طرفاها مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة

- للدائرة عدد لا نهائي من أنصاف الأقطار وجميعها متساوية في الطول

(٢) وتر الدائرة : هو القطعة المستقيمة التي طرفاها أي نقطتين على الدائرة

(٣) قطر الدائرة : هو وتر ما بمركز الدائرة

- للدائرة عدد لا نهائي من الأقطار وجميعها متساوية في الطول

- قطر الدائرة هو أكبر أوتار الدائرة طولا

محيط الدائرة = ٢ ط نق   مساحة الدائرة = ط نق^{٢}

التماثل فى الدائرة

- أي مستقيم يمر بمركز الدائرة يكون محور تماثل لها

- للدائرة عدد لا نهائي من محاور التماثل   - لنصف الدائرة محور تماثل واحد

- لربع الدائرة محور تماثل واحد

نتائج هامة

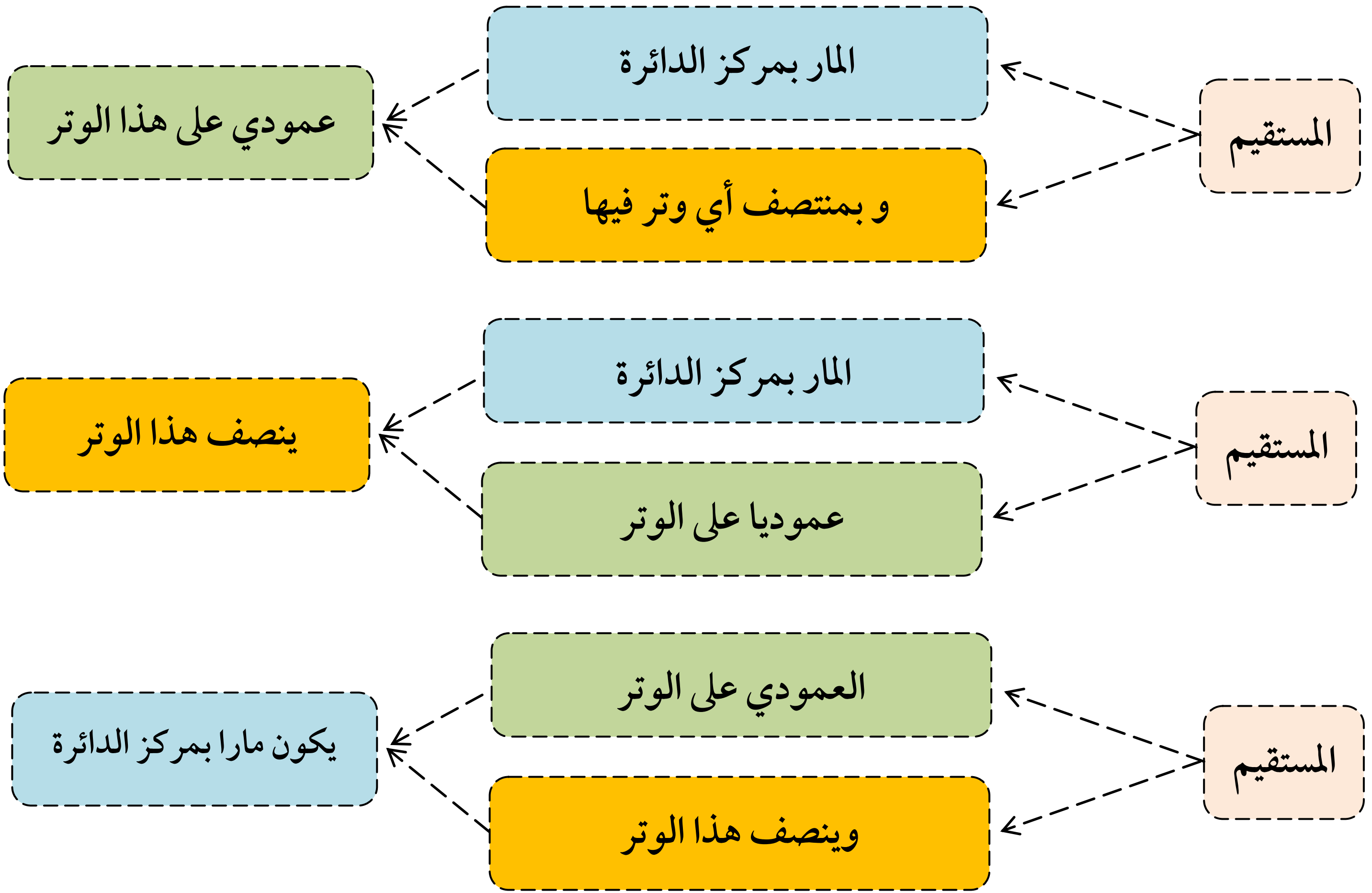
(١) المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أي وتر فيها يكون عموديا على هذا الوتر

(٢)المستقيم المار بمركز الدائرة عموديا على أي وتر فيها ينصف هذا الوتر

(٣) المستقيم العمودي على أي وتر في الدائرة من منتصفه يمر بمركز هذه الدائرة

اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر 01005751300

مخطط تفصيلي يوضح النتائج السابقة



موضع نقطة بالنسبة لدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة في مستوى الدائرة

أ تقع خارج الدائرة	أ تقع على الدائرة	أ تقع داخل الدائرة
م ، أ	م ، أ	م ، أ
إذا كان م أ > نق	إذا كان م أ = نق	إذا كان م أ < نق

01005751300
اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر

موضع مستقيم بالنسبة لدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، ل مستقيم فى مستويها ، رسم م أ ⊥ المستقيم ل

المستقيم ل خارج الدائرة	المستقيم ل خارج الدائرة	المستقيم ل خارج الدائرة
* ل ∩ الدائرة م = ∅ * ل ∩ سطح الدائرة م = ∅	* ل ∩ الدائرة م = { أ } * ل ∩ سطح الدائرة م = { أ }	* ل ∩ الدائرة م = {س ، ص} * ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{س ص}}$
إذا كان م أ > نق	إذا كان م أ = نق	إذا كان م أ < نق

حقيقتان هامتان

المماس لدائرة يكون عموديا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس	المستقيم العمودي على قطر الدائرة من احدى نهايتيه يكون مماسا للدائرة
إذا كان المستقيم ل مماسا للدائرة م عند النقطة أ فإن $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ المستقيم ل	إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م والمستقيم ل ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ من النقطة أ فإن ل مماس للدائرة م عند النقطة أ

إذا كان	فإن الدائرتين	لاحظ أن
م ن > نق$_1$ + نق$_2$ متباعدتان		الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = ∅
م ن = نق$_1$ + نق$_2$ متماستان من الخارج		الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅ سطح الدائرةم ∩ سطح الدائرة ن = ∅
نق$_1$ – نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$ متقاطعتان		الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ، ب } سطح الدائرةم ∩ سطح الدائرة ن = سطح المنطقة المحصورة بين الدائرتين
م ن = نق$_1$ - نق$_2$ متماستان من الداخل		الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ} سطح الدائرةم ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن
م ن < نق$_1$ - نق$_2$ متداخلتان		الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅ سطح الدائرةم ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن
م ن = صفر متحدتا المركز		الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅ سطح الدائرةم ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

ملخص الحالات السابقة



اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر 01005751300

ملاحظات هامة : من الملخص السابق نلاحظ أن :

① إذا كانت : م ، ن دائرتين متباعدتين فإن م ن ∋] نق١ + نق٢ ، ∞ [

② إذا كانت : م ، ن دائرتين متقاطعتين فإن م ن ∋] نق١ - نق٢ ، نق١ + نق٢ [

③ إذا كانت : م ، ن دائرتين متداخلتين فإن م ن ∋] ٠ ، نق١ - نق٢ [

نتيجة:

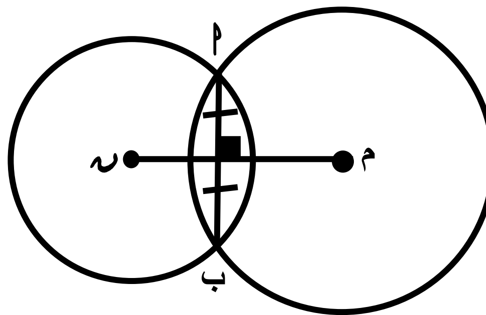
خط المركزين لدائرتين متماستين يمر بنقطة التماس ويكون عموديا على المماس المشترك عند نقطة التماس



نتيجة :

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديا على الوتر المشترك وينصفه

(أي محور تماثل للوتر المشترك)



اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر
01005751300

تعيين الدائرة

نعلم أن الدائرة تتعين إذا علم

① مركزها ② طول نصف قطرها

(١) يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر التي تمر بنقطة معلومة في المستوى

(٢) إذا كان لديك قطعة مستقيمة $\overline{\text{س ص}}$ فإنه

* يمكن رسم عدد لانهائي من الدوائر التي تمر بالنقطتين س ، ص ومراكز هذه الدوائر تقع جميعها على محور تماثل $\overline{\text{س ص}}$ (طالما انه لم يحددلك طول نصف القطر)

أما إذا حدد طول نصف القطر

فمن خلال الجدول التالي يمكنك تحديد عدد الدوائر التي يمكن رسمها لتمر بالنقطتين س ، ص

إذا كان	فإن عدد الدوائر التي يمكن رسمها
طول نصف قطر الدائرة المطلوبة > ١/٢ طول القطعة المعطاة	٢
طول نصف قطر الدائرة المطلوبة = ١/٢ طول القطعة المعطاة	دائرة وحيدة وتكون هي أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين س ، ص ومركزها هو منتصف $\overline{\text{س ص}}$
طول نصف قطر الدائرة المطلوبة < ١/٢ طول القطعة المعطاة	صفر

* أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحد تمر بها دائرة وحيدة

* أي ثلاث نقط على استقامة واحد لا يمكن أن تمر بها دائرة

===

جدول يوضح المقارنة بين الدائرة الخارجة للمثلث والدائرة الداخلة للمثلث

وجه المقارنة	الدائرة الخارجة للمثلث	الدائرة الداخلة للمثلث
التعريف	هي الدائرة التي تمر برؤوس المثلث الثلاث	هي الدائرة التي تمس أضلاع المثلث من الداخل
المركز	هونقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه	هونقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة
التوضيح بالرسم		

جدول يوضح أن مركز الدائرة الخارجة للمثلث باختلاف نوع المثلث

المثلث الحاد الزوايا	المثلث القائم الزاوية	المثلث المنفرج الزاوية
داخل المثلث	منتصف الوتر	خارج المثلث
حالة خاصة : مركز الدائرة الخارجة له هو نفسه مركز الدائرة الداخلة له		

ملاحظات هامة

(١) يمكن رسم دائرة تمر برؤوس كل من المربع والمستطيل وشبه المنحرف المتساوي الساقين

(٢) لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس كل من المعين ومتوازي الأضلاع وشبه المنحرف غير المتساوي الساقين

01005751300
اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر

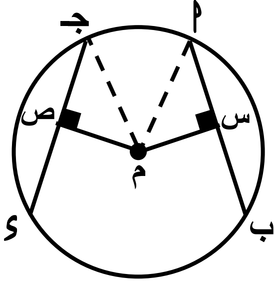
علاقة أوتار الدائرة بمركزها

كلما اقترب الوتر من المركز زاد طوله (أي كلما قل بعد الوتر عن المركز زاد طوله)

وكلما زاد بعد الوتر عن المركز قل طوله

∴ توجد علاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة

نظرية : الأوتار المتساوية في الطول في دائرة على أبعاد متساوية من مركزها



المعطيات : أ ب = جـ ء ، م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ جـ ء

المطلوب : إثبات أن م س = م ص

العمل: نرسم م أ ، م ب

البرهان : ∵ م س ⊥ أ ب ∴ أ س = س ب ، ∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ جـ ص = ص ء

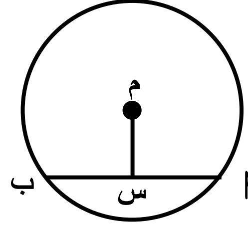
∵ أ ب = جـ ء ∴ أ س = جـ ص

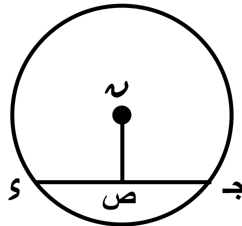
ΔΔ أ س م ، جـ م ص فيهما

① أ س = جـ ص ② م أ = م جـ = نق ③ ق (أ س م) = ق(جـ م ص)= ٩٠°

∴ Δ أ س م ≡ Δ جـ م ص وينتج أن م س = م ص

نتيجة: الأوتار المتساوية في الطول في الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من مركزها





في الشكل م ، ن دائرتان متطابقتان

إذا كان أب = جـ ء فإن م س = ن ص

عكس النظرية : في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول

الزوايا والأقواس

الزاوية المركزية

هي زاوية رأسها مركز الدائرة وكل ضلع من ضلعيها يحمل نصف قطر في الدائرة

قياس القوس : هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

طول القوس: هو جزء من محيط الدائرة

$$\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$$

الزاوية المحيطية

هي زاوية رأسها على الدائرة وكل ضلع من ضلعيها يحمل وترا في الدائرة

قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية الماسية = قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس

قياس الزاوية الماسية = نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس

الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس متساوية في القوس

الزوايا المحيطية التي تحصر أقواسا متساوية في القياس تكون متساوية في القياس

خد بالك :

① قياس أي زاوية محيطية في الدائرة ∋ [٠ ، ١٨٠°]

② الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

③ قياس الدائرة = ٣٦٠° بينما طول الدائرة = ٢ ط نق

④ قياس الزاوية المحيطية المرسومة في أقل من نصف دائرة منفرجة (ازاى ده؟)

اقولك ازاى : فمثلا قياس الزاوية المحيطية المرسومة في ربع دائرة = ...°

دايما الزاوية بتبص على قوسها فعندما تكون الزاوية المحيطية مرسومة في ربع دائرة فيكون قوسها هو القوس المقابل لها وهو $\frac{٣}{٤}$ دائرة ∴ قياسها = $\frac{١}{٢}$ × ٢٧٠° = ١٣٥°

⑤ الزاوية المحيطية المرسومة في أكبر من نصف دائرة حادة

فعندما نقول قياس الزاوية المحيطية المرسومة في $\frac{٢}{٣}$ دائرة = ...°

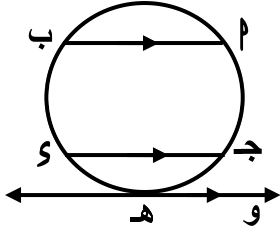
طالما ان الزاوية مرسومة في $\frac{٢}{٣}$ دائرة فيكون قوسها $\frac{١}{٣}$ دائرة أي قياسها = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠°

⑥ في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول والعكس صحيح

⑦ في الدائرة الواحدة أو في الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية في القياس أوتارها متساوية في الطول والعكس صحيح

01005751300
اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر

==



⑧ الوتران المتوازيان في دائرة يحصران قوسين متساويين في القياس

فى الشكل إذا كان أ ب // جـ ء فإن ق (⌒أ جـ) = ق (⌒ب ء)

⑨ القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه في الدائرة متساويان في القياس

فى الشكل المقابل : إذا كان هـ و // جـ ء فإن ق (⌒جـ هـ) = (⌒ء هـ)

تمارين مشهورة

①

أ ، ء ، هـ ، جـ ، ب

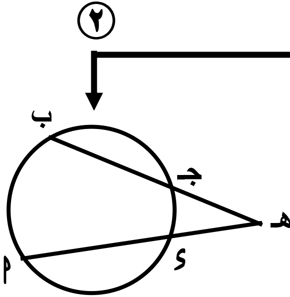
ق (∠ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒أب) + ق(⌒ء جـ)]

↓

ق(⌒أ ب) + ق(⌒ء جـ) = ٢ ق (∠ أ هـ ب)

&

②



ق(∠ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒أب) - ق(⌒ء جـ)]

↓

ق(⌒أ ب) - ق(⌒ء جـ) = ٢ ق (∠ أ هـ ب)

الشكل الرباعي الدائري : هو شكل رباعي يمكن رسم دائرة تمر برؤوسه الأربعة

يكون الشكل الرباعي دائريا في إحدى الحالات الآتية

① إذا وجدت به زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان في القياس

② إذا وجدت به زاويتان متقابلتان متكاملتان

③ إذا وجد ت زاوية خارجة عند أحد رؤوسه= قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

④ إذا وجدت نقطة في المستوى تبعد عن كل رأس من رؤوسه بعد ثابت

خواص الشكل الرباعي الدائري

إذا كان الشكل الرباعي دائريا فإن

① كل زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان فى القياس

② كل زاويتين متقابلتين متكاملتين

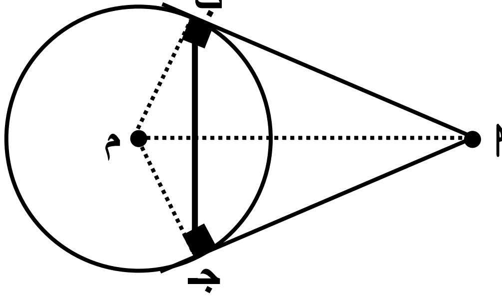
③ قياس الزاوية الخارجة عند أحد رؤوسه = قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

العلاقة بين مماسات الدائرة

(١) المماسان المرسومان من نهايتي قطر في دائرة متوازيان

(٢) المماسان المرسومان من نهايتي وتر في دائرة متقاطعان

نظرية : القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول



الإثبات : في ΔΔ أ ب م ، أ جـ م

① م ب = م جـ = نق

② $\overline{\text{أ م}}$ ضلع مشترك

③ ق (أب م) = ق (أ جـ م) = ٩٠°

∴ Δ أ ب م ≡ Δ أ جـ م وينتج من التطابق أن

① أ ب = أجـ　　　ق (م أب) = ق (م أ جـ)　　　③ ق (أ م ب) = ق (أ م جـ)

نتيجة هامة : المستقيم المار بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محور تماثل وتر التماس

أي أن $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ عمودي على $\overline{\text{ب جـ}}$ وينصفه

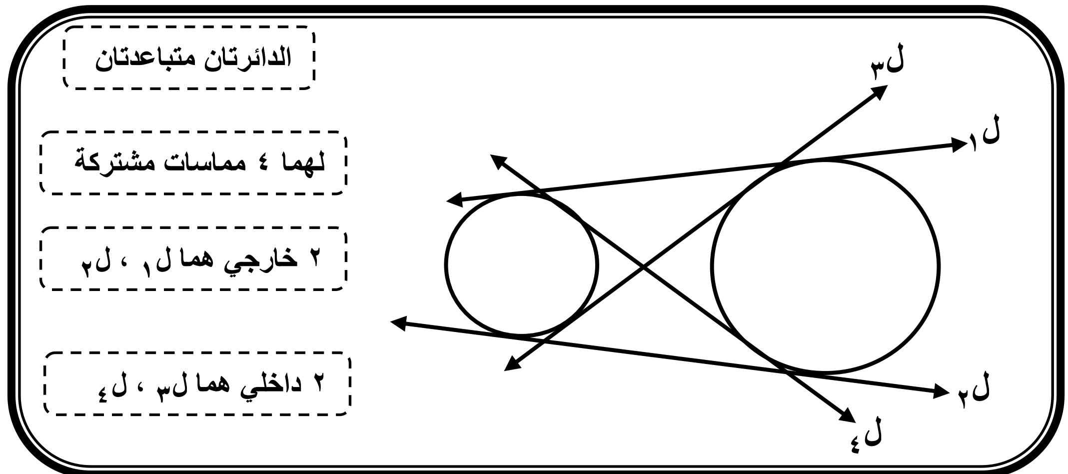
المماسات المشتركة لدائرتين

مماس مشترك خارجي

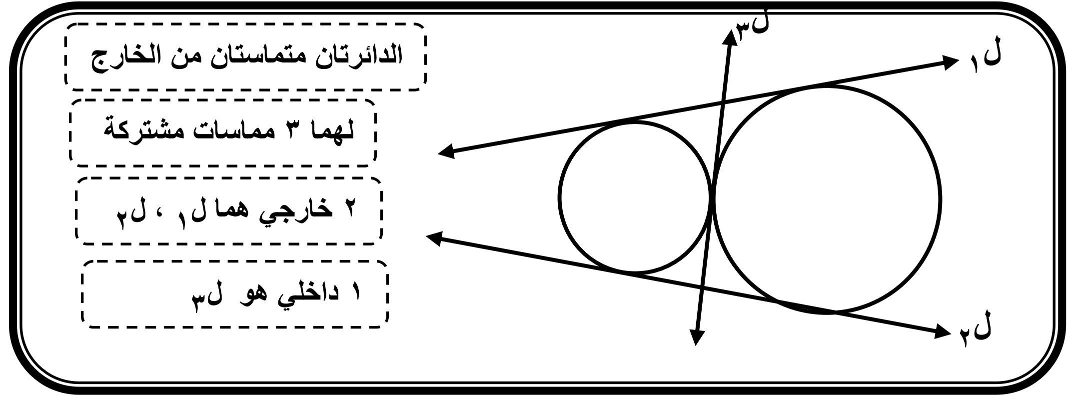
يقال أن المماس المشترك لدائرتين أنه خارجي إذا كانت الدائرتين تقعان في جهة واحدة منه

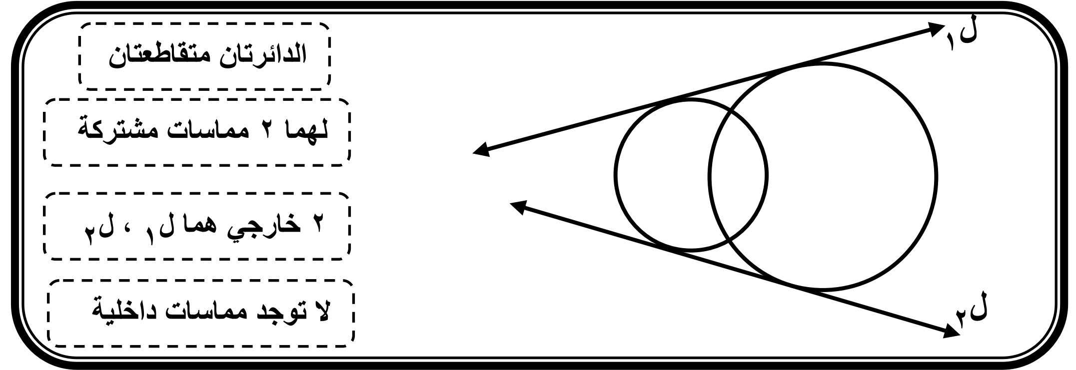
مماس مشترك داخلي

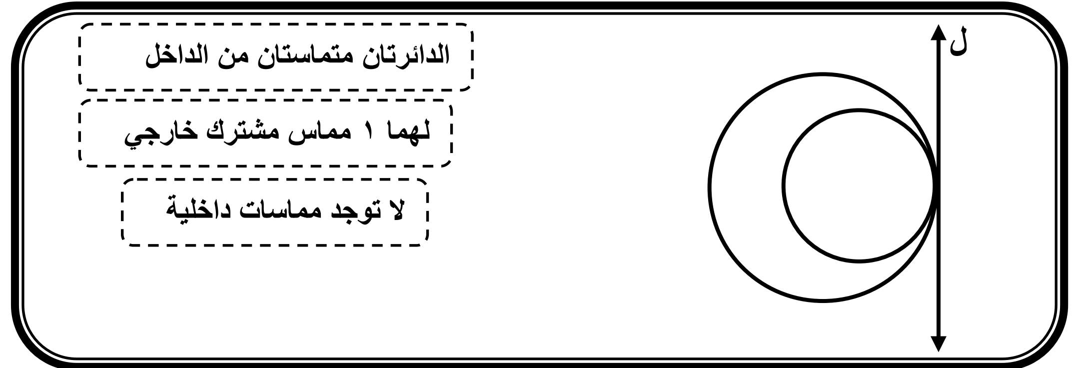
يقال أن المماس المشترك لدائرتين أنه داخلي إذا كانت الدائرتين تقعان في جهتين مختلفتين منه

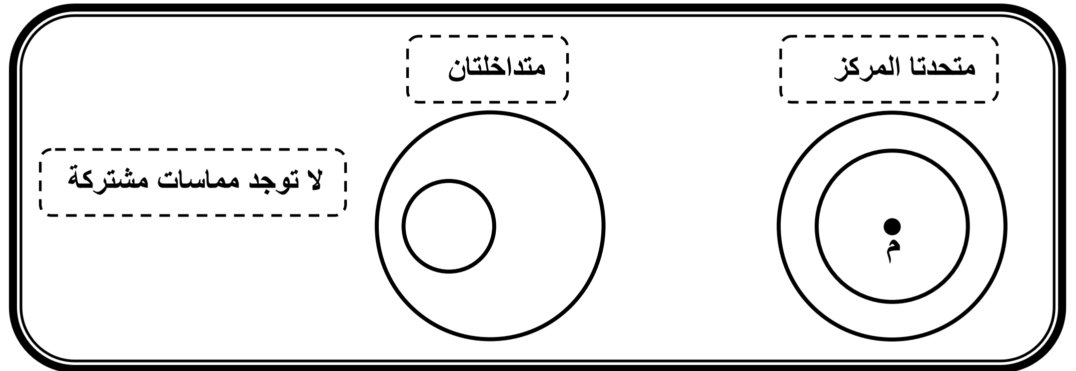


اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر　01005751300









تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر
01005751300